Zettel 4, Afg 2

2.1 Theorem (Existenz der Wurzel)**.** Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ beliebig.

(a) Falls $a > 1$, so existiert genau eine relle Zahl, die mit $\sqrt{a}$ bezeichnet wird, sodass

$$\sqrt{a} > 0 \qquad\qquad \text{und} \qquad\qquad (\sqrt{a})^2 = a.$$

(b) Dies gilt auch für $0 < a < 1$.

Beweis.

SCHRITT 1 (Eindeutigkeit): Sei $a > 0$. Seien $b_1, b_2 > 0$ mit

$$b_1^2 = a = b_2^2.$$

Angenommen $b_1 \neq b_2$. Dann können wir o.E. annehmen, dass $b_1 < b_2$ (sonst umnummerieren). Dann folgt aus den Körperaxiomen einerseits

$$a = b_1^2 = b_1 b_1 < b_2 b_1$$

und andererseits

$$a = b_2 b_2 > b_2 b_1$$

Zusammengenommen erhalten wir

$$a < b_2 b_1 < b_2^2 = a,$$

Widerspruch!

SCHRITT 2 (Existenz für $a > 1$): Definiere die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ und } x^2 \geq a\}.$$

Da $a > 1$, folgt $a^2 > a$ und somit ist $a \in M$. Insbesondere ist $M \neq \emptyset$. Nach Konstruktion ist 0 eine untere Schranke für M. Allerdings erhält man für alle $x \in [0, 1[$, dass $x^2 < 1^2 = 1 < a$ und somit $x \notin M$. Damit ist sogar 1 eine untere Schranke von M, d.h.

$$\forall x \in M : x \geq 1$$

Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert daher

$$s := \inf(M) \in \mathbb{R}.$$

Da das Infimum ja die größte untere Schranke einer Menge ist und wir schon gezeigt haben, dass 1 eine untere Schranke von M ist, folgt

$$s \geq 1 > 0. \tag{2.1}$$

Wir behaupten nun, dass $s^2 = a$ gilt und beweisen dies per Widerspruch: Angenommen $s^2 \neq a$. Dann sind folgende Fälle möglich:

Fall 1 ($s^2 > a$): Aus $s^2 > a$ folgt $s^2 - a > 0$ und daher ist

$$\varepsilon := \frac{s^2 - a}{2s} > 0$$

und es gilt:

$$(s - \varepsilon)^2 = s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2 \overset{\varepsilon^2 \geq 0}{\geq} s^2 - 2s\varepsilon + 0 = s^2 - 2s\frac{s^2 - a}{2s} = a.$$

Nach Definition gilt daher einerseits $s - \varepsilon \in M$, aber andererseits $s - \varepsilon < s$ (da $\varepsilon > 0$). Also ist s keine untere Schranke von M. Widerspruch! (zur Definition von s)

Fall 2 ($1 \leq s^2 < a$): In diesem Fall ist $a - s^2 > 0$ und damit

$$\varepsilon := \min\left(s, \frac{a - s^2}{3s}\right) \geq 0.$$

Man mache sich klar, dass dann automatisch die Gleichungen

$$\varepsilon \leq s, \tag{2.2}$$

$$\varepsilon \leq \frac{a - s^2}{3s} \tag{2.3}$$

erfüllt sind.
Gemäß Satz 1.14 aus der Vorlesung existiert ein $x \in M$, sodass $x < s + \varepsilon$. Für dieses x gilt dann aber

$$\begin{aligned} x^2 < (s + \varepsilon)^2 &= s^2 + 2\varepsilon s + \varepsilon\varepsilon \overset{(2.2)}{\leq} s^2 + 2\varepsilon s + \varepsilon s \\ &= s^2 + 3\varepsilon s \overset{(2.3)}{\leq} s^2 + 3s\frac{a - s^2}{3s} = a. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir damit $x^2 < a$ gezeigt. Widerspruch! (zu $x \in M$).

Fall 3 ($s^2 < 1 < a$): Wir wissen schon aus (2.1), dass $s \geq 1$ und somit auch $s^2 \geq 1$. Der theoretische Fall $s^2 < 1$ kann also nicht eintreten.

Es folgt also insgesamt $s^2 = a$ und $s \geq 1 > 0$, was zu zeigen war.

Schritt 3 (Existenz für $0 < a < 1$): In diesem Fall ist $b := \frac{1}{a} > 1$ und somit existiert gemäß dem bisher Gezeigten genau eine Zahl $\sqrt{b} > 0$ mit $\sqrt{b}^2 = b$ Die Zahl $\frac{1}{\sqrt{b}} > 0$ erfüllt daher

$$\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{b}^2} = \frac{1}{b} = a.$$

$\square$